MAI 1 – 12. cvičení „písemné" – „pokračování"

několik dalších příkladů výpočtu a aplikací určitého integrálu

1. Obsah rovinné oblasti, ohraničené elipsou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$.

tj. $\omega = \left\{ [x,y];\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ a>0, b>0 \right\}$

tj. $\omega = \left\{ [x,y];\ -a \leq x \leq a,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right\}$

a $\underline{S(\omega)} = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \underset{\text{(sudost integrandu)}}{=} 4\cdot\int_{0}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx =$

integrovaná fce je spojitá v $\langle 0,a\rangle$, integrál existuje (RiN)

$$\underset{\text{(subst.)}}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ x = at,\quad dx = a\,dt \\ x=0 \to t=0 \\ x=a \to t=1 \end{array} \right| = 4b.a\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\text{(subst.)}}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = \sin y \Leftrightarrow y = \arcsin t & \\ dt = \cos y\,dy, & t\in\langle 0,1\rangle \\ t=0 \to y=0 & y\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ t=1 \to y=\frac{\pi}{2} & \end{array} \right| = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\,dy =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy = 2ab\left[y+\frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\pi ab}$$

(„známé")

2. „Ověření" vzorce pro objem koule o poloměru $R\,(>0)$.

– můžeme uvažovat kouli jako rotační těleso, které vznikne rotací $\omega = \{ [x,y];\ x \in \langle -R, R \rangle,\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \}$ kolem osy x, tj. $f(x) = \sqrt{R^2-x^2},\ x \in \langle -R, R\rangle$ pro vzorec:

$$\underline{V} = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)\,dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx \underset{(\text{sudost})}{=} 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx =$$

$$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 = \underline{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

A podobně:

3. Vzorec pro objem elipsoidu, který vznikne rotací oblasti $\omega = \{ [x,y];\ -a \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \}$, $a>0, a>0$ (tj. horní „poloviny" elipsy) kolem osy x:

zde: $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ x \in \langle -a, a \rangle$, tj.:

$$\underline{V} = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \underset{(\text{sudost})}{=} 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = 2\pi b^2 \left[a - \frac{a^3}{3a^2} \right] = \underline{\frac{4}{3}\pi a b^2}$$

4. Ověření vzorce pro výpočet povrchu koule o poloměru $R\ (>0)$

Pro vzorec pro výpočet povrchu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ω kolem osy x, kde

$$\omega = \{ [x,y];\ x \in \langle a,b \rangle,\ 0 \le y \le f(x) \}$$

(kde f má spojitou f' v $\langle a,b \rangle$)

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

vezmeme $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, $x \in \langle -R, R \rangle$

„pozor":

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$ – jen v $(-R,R)$! a dále

$$f(x) \cdot \sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}} =$$

$= R$ – „dopadlo" to dobře –

tedy $\underline{S} = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 2\pi R\, [x]_{-R}^{R} = \underline{4\pi R^2}$

Poznámka: pro výpočet délky kružnice bychom ale dostali

($f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, $x \in \langle -R, R \rangle$)

$$l = 2 \int_{-R}^{R} R \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx$$ – jen integrál Newtonův, neboť $\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$ není funkce omezená v $(-R,R)$

5. Užití integrálního kritéria pro vyšetření konvergence řad

Připomenutí:

$f(x) \geqq 0$, spojitá a nerostoucí v $\langle 1, +\infty)$, pak

$$\sum_1^\infty f(n) \text{ konverguje } \iff \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx \in R$$

(existuje a je vlastní)

Na přednášce bylo ukázáno, že se „snadno" dokáže pak:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} \text{ konv.} \iff p > 1$$

A další příklady:

a) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}$ – snadno se ukáže srovnáním s $\sum \frac{1}{n^2}$, že konverguje:

zde: $\frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}} = f(n)$,

kde $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$f(x) > 0$, klesající v $\langle 1, +\infty)$

$\frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{n^2} \cdot e$, $\sum \frac{1}{n^2} e$ konv.

tj. částečné součty řady $\sum_1^N \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}$ tvoří shora omezenou a neklesající (rostoucí) posloupnost, tedy řada konverguje

ale též lze „vyzkoušet" integrální kritérium:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \underset{(VS)}{=} \lim_{b\to\infty} \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(e - e^{\frac{1}{b}} \right) = e - 1 \in R,$$

tj. i „odtud" – daná řada konverguje

b) podobně i u řady $\underline{\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+1}}$: –

je hned vidět, že $0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{n^2+1}$ konverguje,

ale „vyjde" i integrálním kritériem:

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, spojitá, $f(x) > 0$ a klesající v $\langle 1, +\infty)$,

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R},$$

tj. i odtud – $\sum_1^\infty f(n) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2+1}$ konverguje.

c) a „lepší" příklady: vyšetřit konvergenci řad

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n} \quad \text{a} \quad \sum_2^\infty \frac{1}{n \ln^2 n} :$$

(i) $\underline{\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n}}$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ v $\langle 2, +\infty)$ spojitá, klesající, kladná",

a $$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x}\,dx \underset{(VS)}{=} \lim_{b\to\infty} \left[\ln(\ln x)\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \right) = +\infty ,$$

tedy $\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n}$ diverguje.

(ii) Ale: $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje, neboť

$$\frac{1}{n \ln^2 n} = f(n), \text{ kde } f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x},$$

f je kladná, spojitá, klesající v $\langle 2, +\infty)$, a

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx \underset{VS}{=} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{\ln 2} - \underbrace{\frac{1}{\ln b}}_{\text{„}\frac{1}{\infty}\text{“} \to 0} \Big) = \frac{1}{\ln 2} \in R$$

Můžete ukázat analogicky i

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \,. \quad (p > 0)$$